

13/05/19

Άσκηση

Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 1$

Λύση

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ όπου } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

και $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας της ως προς τη συνθήκη

Βάση $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbf{A}$ είναι $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots =$

0, ρίζες του $\chi_{\mathbf{A}}$, δηλαδή οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ είναι: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

• Ο ιδιοχώρος $V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$V_{\lambda_1} = \{ (x, x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$. Το $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

είναι ορθοκανονική βάση του V_{λ_1}

• Ο ιδιοχώρος $V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \{ (0, -y, y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \{ y(0, -1, 1) \mid y \in \mathbb{R} \}$

• Το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{e}}_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ είναι ορθοκανονική βάση του V_{λ_2}

• Ο ιδιοτιπος $V_{\lambda_3} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

→ Αν εβγαίνο ως άξον η λινδευση, τότε δε ειαμε

Αδός. Το $\tilde{e}_3 = (-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$ είναι ορθονομια βαςη του V_{λ_3}

Τα διανυσματα $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ είναι ορθονομια βαςη του $\mathbb{R}^3$ με

Επειδη η οριζουα του πινακα μεταβαςης είναι -1, αυτο ενλινει ου δεν είναι δεξιοστροφη, ελεις ομωσ την δελαμε δεξιοστροφη και γ'αυτο παμε ε'ενα απο τα τρια διανυσματα και αλλοζουμε προσημ. εστω $\tilde{e}_2 = (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

πινακα μεταβαςης $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & \sqrt{6}/6 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ με $\det P = +1$

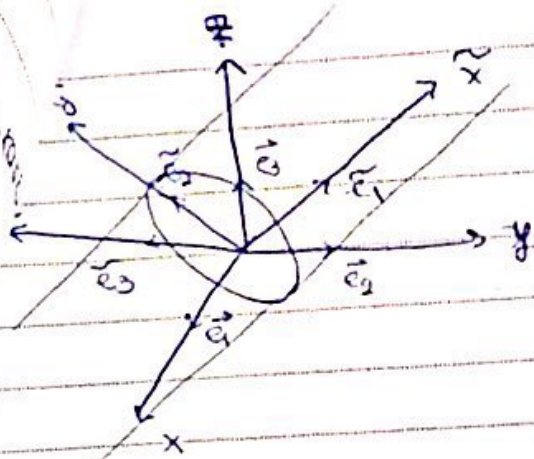
$$P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ος προς τη βαςη $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ η q γραφεται

$q(x, y, z) = x^T A x = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2$ οπου $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ είναι οι συντεταγμενς του $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τη βαςη $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$

$$x = P \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

Η ελωση γραφεται ισοδυναλτα $\tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 = 1$ ως προς το συστημα συν/μεων $0 \leq \tilde{x} \leq 1$



Άρα είναι ελλειπτικός επιπύδρος

Άσκηση

Τι περιγράφει η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = 2$ (*)

Λύση

Θεωρώ την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = X^T A X$, όπου $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας της ως προς την συνήθη βάση

$\{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ με πολλα 2
 $\lambda_2 = 4$ με πολλα 1

$$\begin{aligned} \text{Ο ιδιοχώρος } v_{\lambda_1} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ο ιδιοχώρος είναι} &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda - z = 0 \} = \{ (x, y, \lambda) \mid \lambda, y \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ \lambda(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) \mid \lambda, y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Τα διανύσματα

$$\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\tilde{e}_2 = (0, 1, 0)$$

συνιστούν ορθή

βάση του V_{λ_1}

Ο ιδιοχώρος $V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda (1, 0, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Το διάνυσμα

$$\tilde{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

είναι ορθή βάση του V_{λ_2}

Άρα τα διανύσματα $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ συνιστούν ορθή σύστημα βάσης του $\mathbb{R}^3$ με

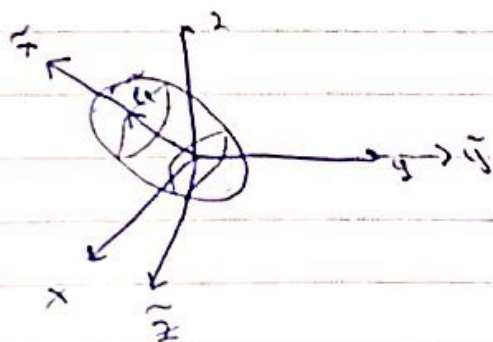
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det P = - \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1$$

Άρα $q(x, y, z) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_1 \tilde{y}^2 + \lambda_2 \tilde{z}^2 = 2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 2\tilde{z}^2$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$

$$\Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 4\tilde{z}^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}^2}{1^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} + \frac{\tilde{z}^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$$

Είναι ελλειψοειδές



Άσκηση

Τι παριστάει η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z - 16 = 0$ (*)

Λύση

η $\textcircled{A} \rightarrow q(x, y, z) = 2x - 4y - 12z - 16 = 0$, όπου $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι
 η τετραγωνική μορφή με $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 = X^t A X$ με $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 και $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y - 2z^2 - 12z - 16 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 2(z^2 + 6z + 9) - 16 &= 1 + 4 - 18 \Leftrightarrow \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(z+3)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Θέτουμε $x' = x - 1$

$y' = y - 2$

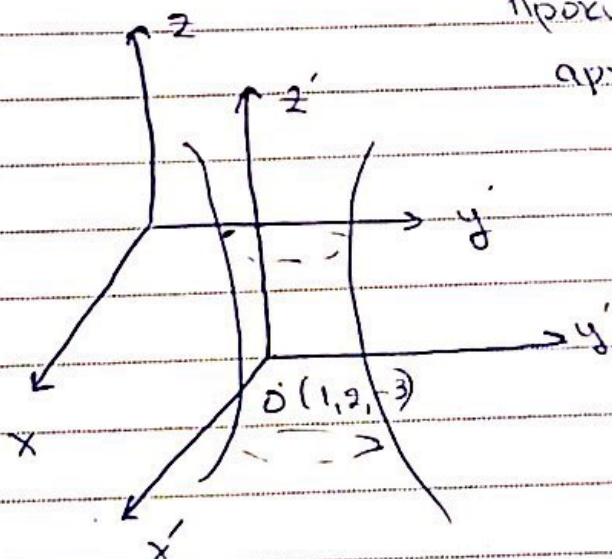
$z' = z + 3$

τότε η $\textcircled{A}$ ισοδυναμεία γραφεί

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 - 2(z')^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{2(z')^2}{(\sqrt{3} \cdot 2)^2} = 1$$

Είναι λοιπόν υπερβολοειδές ως προς το σύστημα $O'x'y'z'$ το
 προκύπτει από απλή μεταφορά του O
 στην $O'(1, 2, -3)$



Άσκηση

Να βρεθούν η εξίσωση: $x^2 - 2y^2 + 36y - z - 16 = 0$ $\textcircled{A}$

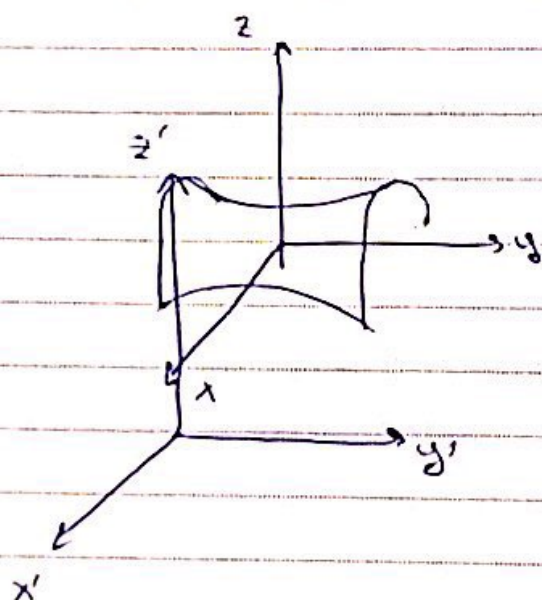
Λύση

$$(*) \rightarrow x^2 - 2(y^2 - 18y) - 2 - 161 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(y^2 - 2y \cdot 9 + 9^2) - 2^2 - 161$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(y-9)^2 = 2-1 \quad (**)$$

$$\text{Θέτω } \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 9 \\ z' = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 0 \\ y = y' + 9 \\ z = z' + 1 \end{cases}$$

$(**)(*) \Rightarrow (x')^2 - 2(y')^2 = z'$ στο σύστημα συντεταγμένων $O'x'y'z'$ το οποίο είναι παράλληλη μεταφορά των $Oxyz$ με αρχή το $O(0, 9, 1)$



υπερβολώδης

παραβολοειδές

Άσκηση

Να μελετηθεί η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 3x + 2y = 0$ (*)

Λύση

(1^ο Διαγωνιοποίηση τετραγ. μορφής.)

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4yz =$
 $= X^T A X$ όπου $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας

της ως προς την κανονική βάση $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

~~$(1-\lambda)(\lambda-1)^2 - 2^2$~~ $(1-\lambda)(\lambda-1)^2 - 2^2 = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$ (ονόμα)

Ιδιοχώροι

$$V(\lambda_1) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$= \{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Το $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ορθοκανονική βάση του V_{λ_1}

$V_{\lambda_2} = \{ x(0, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$. Το $\vec{e}_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ είναι ορθ. βάση του V_{λ_2}

$V_{\lambda_3} = \{ x(0, 1, -1) \mid x \in \mathbb{R} \}$. Το $\vec{e}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ είναι ορθ. βάση του V_{λ_3}

Συνεπώς τα $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ συνιστούν ορθοκ. βάση του $\mathbb{R}^3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

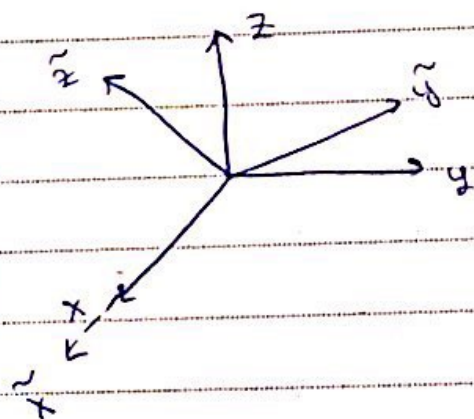
$\leadsto$ Επειδή έχουμε $\det P = 1$
αλλάζω ποσό ένα διάνυσμα

Άρα $\det P = 1$

Άρα $P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. // τετραγωνική μορφή

Θαυμάζεται $q(x, y, z) = x^T A x = \tilde{x}^T D \tilde{x}$

$\tilde{x} = D \tilde{x} \mid = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2$



$$\tilde{x} = P \tilde{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \tilde{x} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{z} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{z} \end{cases}$$

11 (4) Στο σύστημα συντεταγμένων $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ισοδυναμία προκύπτει:

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 3\tilde{z}^2 + 3\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{y} - \frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{z} = 0 \quad \xrightarrow[\text{τετραγωνισμός}]{\text{αμείνωση}}$$

$$\left(\tilde{x} + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{23}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\tilde{x} + \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} - \frac{\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} + \frac{\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{12 \cdot 3}}\right)^2} = 1 \quad (*)$$

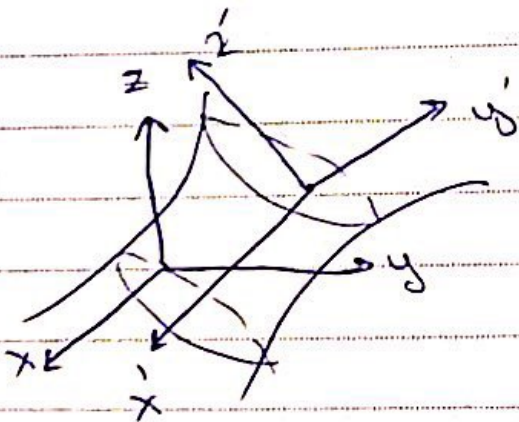
Παρατήρηση

$$\left. \begin{aligned} x' &= \tilde{x} + 3/2 \\ y' &= \tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z' &= \tilde{z} + \sqrt{2}/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \tilde{x} &= x' - 3/2 \\ \tilde{y} &= y' + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tilde{z} &= z' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right.$$

Η $(*)$ στο σύστημα $O'x'y'z'$ που προκύπτει από παρ/ση μεταφορά του συστήματος $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ με αρχή το O' με συν/κούς $(-3/2, \sqrt{3}/2, -\sqrt{2}/2)$ ως προς το $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ γράφεται

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} + \frac{(z')^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{3 \cdot 12}}\right)^2} = 1$$

Είναι λοιπόν υπερβολή



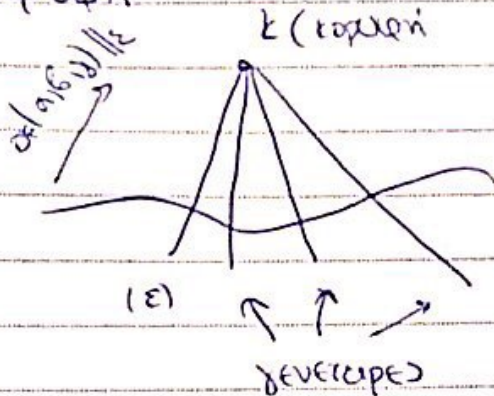
ΚΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Ορισμός 3

Μια επιφάνεια καλείται κωνική, αν από ένα σημείο της διατρέχεται (Πλευρά ή οποία προέρχεται από επιφάνεια

2) και όλες οι ευθείες τέμνονται στο ίδιο σημείο, το οποίο καλείται

κορυφή



(κορυφή = μια επιφανειακή καμπύλη που τέμνει όλες τις γενεσις

Προβλήματα

Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας S όταν δίνεται η κορυφή της $K(x_0, y_0, z_0)$ και μια καμπύλη οδηγός του

$$K) \begin{cases} f(x, y, z) = 0 & (1) \\ g(x, y, z) = 0 & (2) \end{cases}$$

Απάντηση

Έστω E γενεσις της S

$$(E): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta}$$

$$\text{Έστω } a \neq 0: (E) \cdot \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\delta} \quad (3)$$

Κάνω αναγωγή των x, y, z με τα a, b, δ των (1), (2), (3)

$$\leadsto p(b/a, \delta/a) = 0 \Rightarrow F(a, b, \delta) = 0$$

Ορισμός: Μια συνάρτηση 3 μεταβλητών καλείται ομογενής βαθμού n αν

$$F(tx, ty, tz) = t^n \cdot F(x, y, z)$$

$$\text{π.χ. } F(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} \leadsto F(tx, ty, tz) = t^{4/2} F(x, y, z)$$